Maistiaisia montessorimatematiikasta
Kuinka voin tukea lukujen rakenteen oppimista?

Helsingin yliopisto
Opettajan pedagogiset opinnot
Erityispedagogiikan opintosuunta
Lopputyö 5 op
Kasvatustiede
Maaliskuu 2022
Jonna Niiniaho

Ohjaaja: Lotta Uusitalo

Sisällys

KUVAT

1. Johdanto

Matemaattiset oppimisvaikeudet näkyvät koulussa erityisesti oppilaiden pulmina lukumääräisyyden tajussa, laskemisen taidoissa, aritmeettisissa taidoissa, laskustrategioissa, lukujen paikka-arvon ja rakenteen ymmärtämisessä sekä soveltavissa sanallisissa tehtävissä. Samat pulmat voivat esiintyä läpi kouluiän. Aukot näissä keskeisissä taidoissa voivat estää myöhempien taitojen oppimista. (Mononen ym., 2017.)

Koulussa opittavan matematiikan pohja muodostuu varhaisista matemaattisista taidoista (Mononen ym., 2017). Aunio & Räsänen (2015) ovat luoneet näistä keskeisistä matemaattisista taidoista mallin, joka koskee erityisesti 5-8-vuotiaita lapsia. Mallissa on neljä taitoaluetta: (1) Lukumääräisyyden taju, (2) laskemisen taidot, (3) aritmeettiset perustaidot ja (4) matemaattisten suhteiden ymmärtäminen. Näiden taitojen on todettu useissa tutkimuksissa ennustavan hyvin myöhempien matemaattisten taitojen ja koulumatematiikan osaamista.

Alakouluikäisillä keskeisiä matemaattisia taitoja ovat aritmeettiset perustaidot, joiden lisäksi laskemisen taidoilla ja lukumääräisyyden tajulla on tärkeä rooli keskeisten matemaattisten taitojen hallinnassa (Mononen ym., 2017). Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että matemaattisten suhteiden ymmärtäminen ei olisi kouluiässä enää merkityksellistä, sillä niiden hyvä ymmärtäminen luo tärkeän pohjan myöhemmälle matematiikan oppimiselle, ja mahdolliset puutteet tällä taitoalueella näkyvät kouluiässä mm. lukualueen laajentuessa moninumeroisiin lukuihin (Mononen ym., 2017) ja vaikeuksina desimaalilukujen oppimisessa (Baturo, 1997).

Matemaattisten suhteiden ymmärtäminen on taitokokonaisuus, joka muodostuu (1) matemaattis-loogisista taidoista, (2) ymmärryksestä matemaattisten symbolien käytöstä, (3) aritmeettisista periaatteista sekä (4) paikka-arvosta ja kymmenjärjestelmästä (Aunio & Räsänen, 2015). Tässä työssä käsittelen näistä taidoista erityisesti jälkimmäistä, eli paikka-arvoa ja kymmenjärjestelmää, jota kutsutaan myös lukujen rakenteeksi.

Tässä kirjallisuuskatsauksessa kuvaan aluksi matematiikan havainnollistamista ja montessorimatematiikkaa. Tämän jälkeen etenen selvittämään, mitä erityisopettajaopinnoissamme ja kirjallisuudessa on kerrottu kymmenjärjestelmästä ja paikka-arvosta sekä niiden oppimisesta. Lopuksi käsittelen sitä, kuinka montessorivälineitä voidaan hyödyntää näiden käsitteiden oppimisessa ja pohdin, kuinka lukujen rakenteen oppimista voisi tukea nykykoulussa.

Valitsin tämän tutkimusaiheen, koska olen itse kiinnostunut matematiikan opettamisesta ja montessorimatematiikasta. Olen kouluttautunut Montessori-opettajaksi Dr. Kay M. Bakerin ohjauksessa vuosina 2016-2018 Gironassa, Espanjassa. Tässä Montessori-luokanopettajan koulutuksessa valmistimme opettajamme ohjauksessa montessorikansiot, joiden avulla voimme toteuttaa montessoriluokanopetusta alakoulussa eri oppiaineissa. Tässä lopputyössä olen hyödyntänyt koulutuksessa valmistamaani matematiikan kansiota, joka löytyy lähteistä viittellä Baker, 2018.

2. Teoreettiset lähtökohdat

2.1 Montessori-menetelmästä

Montessori-menetelmä on vaihtoehtopedagogiikka, jonka italialainen lääkäri Maria Montessori kehitti 1900-luvun alussa. Montessoriluokan keskiössä on valmisteltu oppimisympäristö, jossa lapsille on tarjolla montessorimenetelmän mukaisia oppimisvälineitä, ja oppilaiden työskentely tapahtuu yleensä pienryhmissä tai yksin. (American Montessori Society, 2022.)

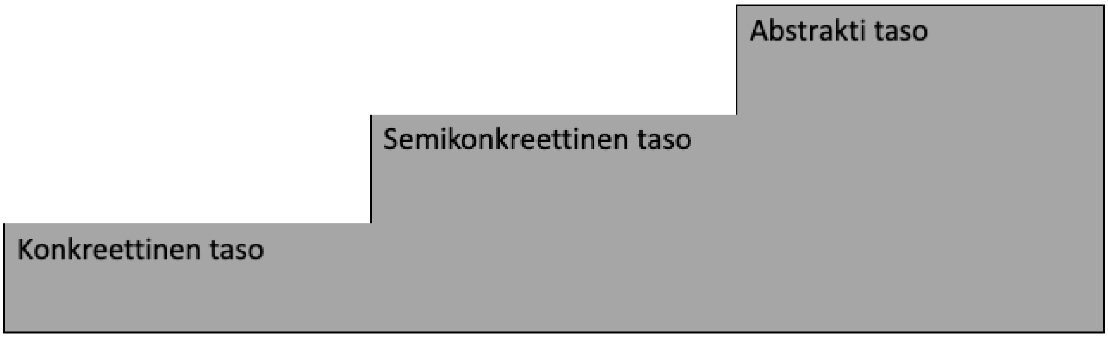
Maria Montessori alkoi kehittää Montessori-menetelmää työskennellessään lääkärinä kehitysvammaisten lasten parissa Italiassa vuonna 1900. Hän totesi, että oppiakseen nämä lapset tarvitsevat oikeanlaista pedagogiikkaa, eivät lääketieteellistä hoitoa. Aluksi hän työskenteli kehitysvammaisten lasten kanssa, kehitti opetusmenetelmäänsä ja sai siitä lupaavia tuloksia. Tämän jälkeen hän siirtyi työskentelemään ei-kehitysvammaisten lasten pariin Rooman silloiselle köyhälistöalueelle. Tänne hän myös perusti 3-7 -vuotiaille ensimmäisen lastentalon, “Casa dei Bambinin”. Hän jatkoi pedagogiikan kehittämistä ja lasten havainnointia. Tekemiensä havaintojen perusteella hän päätteli, että lasten kehitys tapahtuu erilaisten kehitys- ja herkkyyskausien kautta. Näiden pohjalta hän kehitti Montessori-menetelmän ja siihen kuuluvia erilaisia oppimisvälineitä, jotka tukevat lasten itseohjautuvuutta ja toimijuutta valmistellussa ympäristössä. (Marshall, 2017.)

Valmistellulla ympäristöllä viitataan montessoriluokkaan, joka on rakennettu niin, että lapsella on mahdollisuus toimia ja liikkua luokassa itsenäisesti. Opettajan rooli luokassa on erityisesti oppimisen mahdollistaja, tukija ja ohjaaja. (Marshall, 2017.) Montessoriluokat koostuvat aina useammasta ikäluokasta ja opetus tapahtuu useimmiten pienryhmissä. Varsinaisia koko luokan oppitunteja ei yleensä pidetä. (Scott & Myers, 2021.)

2.2. Matematiikan havainnollistaminen

Havainnollistamisen tavoitteena on auttaa oppijaa ymmärtämään paremmin abstrakteja matemaattisia käsitteitä ja laskutoimituksia. Laskutehtävä ja siinä tapahtuva tilanteen muutos voidaan tehdä havainnollistamisen avulla näkyväksi. Havainnollistamisvälineiden ja -mallien käyttöä tulee harjoitella, jotta lapsi oppii kunnolla niiden käytön. Kulloiseenkin tehtävään tulee myös käyttää siihen parhaiten soveltuvia välineitä. Välineestä voi tulla lapselle toimiva apuväline vasta, kun sen käyttöä on harjoiteltu riittävä määrä. Opetusta ei tulisi myöskään sitoa vain yhteen tapaan havainnollistaa tiettyä matemaattista käsitettä, sillä monipuolisuus tukee pitkäkestoista oppimista ja ymmärtämistä. Esimerkiksi murtoluvuissa olisi hyvä käyttää murtokiekkojen lisäksi myös suorakulmioita, kolmioita tai muita vaihtelevia muotoja, jottei lapsi saa virheellistä käsitystä, että kokonainen on aina pyöreä (Mononen ym. 2017.) Tämän vuoksi myös montessorimatematiikassa käytetään useita erilaisia välineitä havainnollistamaan samoja käsitteitä (Baker, 2018).

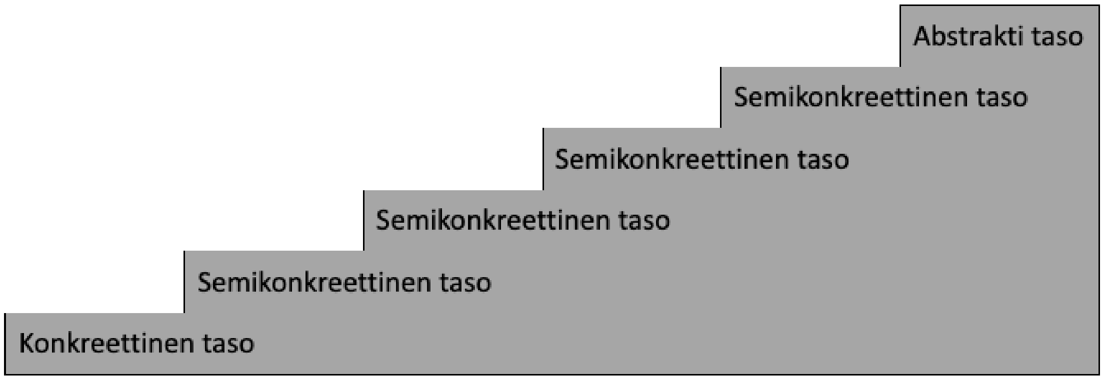
Matematiikkaa voidaan havainnollistaa eri tavoin. Havainnollistaminen voidaan jakaa kolmelle tasolle: (1) konkreettinen havainnollistaminen, joka tapahtuu käsin kosketeltavien todellisten esineiden avulla (leikkiautot, hedelmät), (2) semikonkreettinen havainnollistaminen, jossa matematiikkaa kuvataan jollakin symbolisella tavalla (kuvat, pisteet, tikut, lukusuora, murtokiekot) ja (3) abstrakti havainnollistaminen, jossa operoidaan numeromerkkien, muiden symbolien ja sanojen avulla. (Mononen, ym., 2017.) Havainnollistan tätä jaottelua kuvassa 1 (Kuva 1).



Kuva 1. Matematiikan havainnollistamisen tasot. Matematiikan havainnollistaminen voidaan jakaa kolmelle tasolle, joita ovat konkreettinen havainnollistaminen, semikonkreettinen havainnollistaminen ja abstrakti havainnollistaminen.

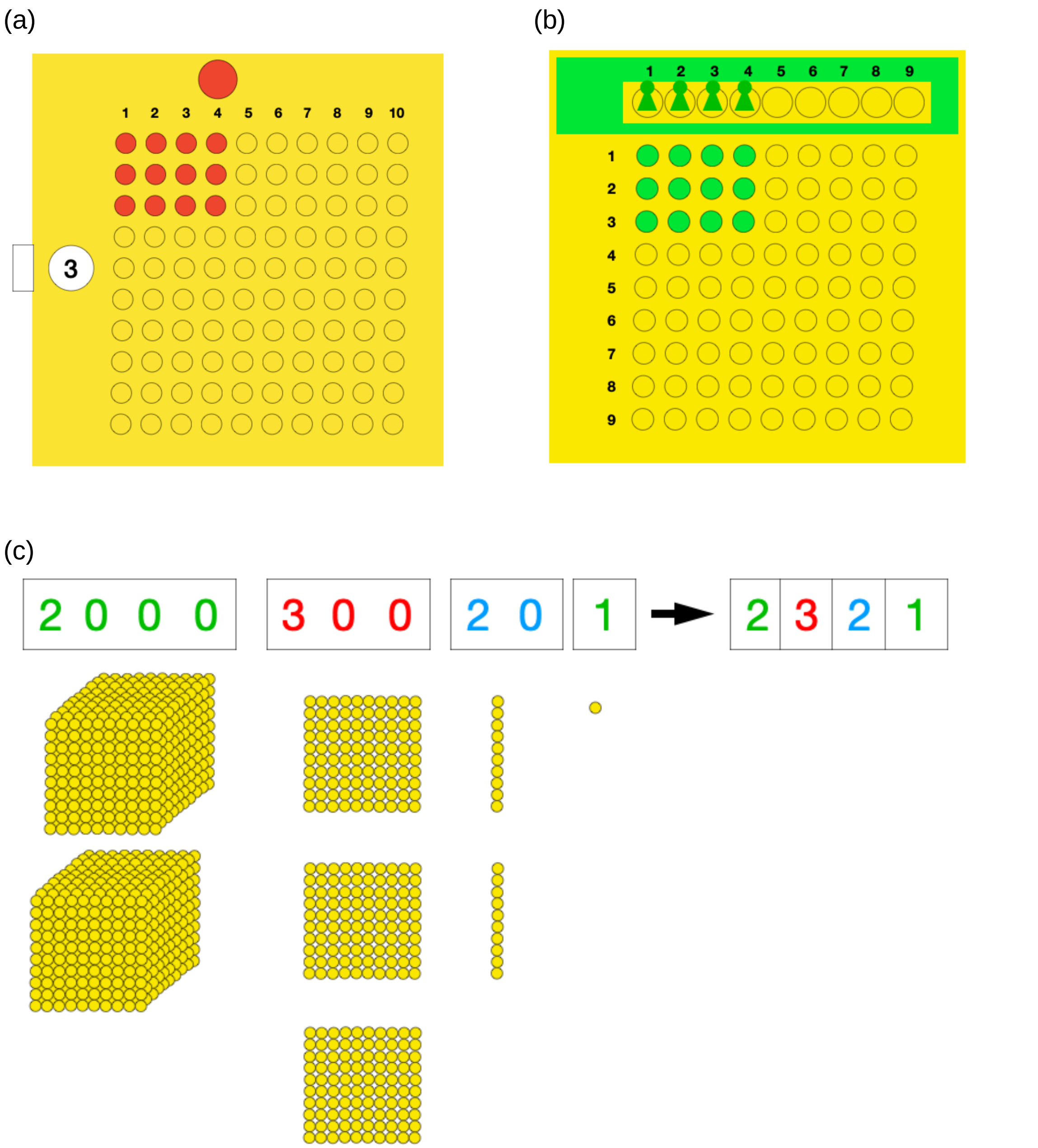
Montessorimatematiikassa on erilaisia tarkasti suunniteltuja ja valikoituja oppimisvälineitä ja -pelejä, joita lapsi käsittelee ja manipuloi (Scott & Myers, 2021). Välineet on suunniteltu tukemaan oppimista. Niitä on paljon erilaisia, matematiikassa useita kymmeniä. (Baker, 2018.)

Montessorimenetelmässä matematiikkaa havainnollistetaan kaikilla abstraktion tasoilla. Lapselle esitellään uusi asia ensiksi mahdollisimman konkreettisen välineen avulla. Lapsi tutustuu uuteen asiaan ja käsitteeseen tämän välineen avulla, ja hän voi käsitellä ja manipuloida sitä (Montessori Australia 2022). Tämän jälkeen siirrytään abstraktion portailla pikkuhiljaa eri materiaalien ja niillä suoritettavien tehtävien kautta kohti abstraktia tasoa, jolla lapsi pystyy operoimaan täysin symbolien maailmassa (Baker, 2018). Olen tullut siihen päätelmään keskusteltuani muiden montessoriopettajien kanssa, että montessorivälineet keskittyvät suurelta osin semikonkreettiselle havainnollistamisen tasolle. Tätä havainnollistan kuvassa 2 (Kuva 2).



Kuva 2. Abstraktion portaat montessorimatematiikassa. Suurin osa montessorivälineistä sijoittuu semikonkreettisille havainnollistamisen tasoille.

Matematiikan montessorivälineissä on joitakin materiaaleja, jotka ovat konkreettisia, tai ainakin hyvin lähellä tätä abstraktion porrasta. Joku voi sanoa, että nämäkin materiaalit kuuluvat semikonkreettisiin materiaaleihin, sillä niissä ei ole kyse oikeista esineistä kuten autoista ja kynistä, vaan nekin ovat matemaattisia representaatioita. Näissä materiaaleissa kuitenkin toteutuu yksi-yhteen-vastaavuus, minkä vuoksi olen asettanut ne tälle portaalle. Tällaisia materiaaleja ovat esimerkiksi kertolaskulauta (*multiplication board*), jakolaskulauta (*division board*) ja kultaiset helmet (*golden beads*). Kertolaskulaudan avulla lapsi harjoittelee kertolaskuja laittamalla kertolaskun mukaisen määrän helmiä laudalle. Jakolaskulauta toimii samalla tavalla, mutta toiseen suuntaan pelinappuloille helmiä jakaen. Kultaiset helmet ovat käytössä, kun lapsi harjoittelee kymmenjärjestelmän rakentumista. Helmet ovat kaikki saman värisiä, jotta oppiminen keskittyy lukumäärän havainnointiin, eikä juuri tämän tehtävän kannalta epäolennaisiin seikkoihin kuten väriin. Niiden kanssa käytetään yleensä värikoodattuja lukukortteja. Kultaisilla helmillä voi myös tehdä erilaisia laskutoimituksia. (Baker, 2018.) Kuvassa 3 havainnollistan näitä konkreettisia materiaaleja (Kuva 3).



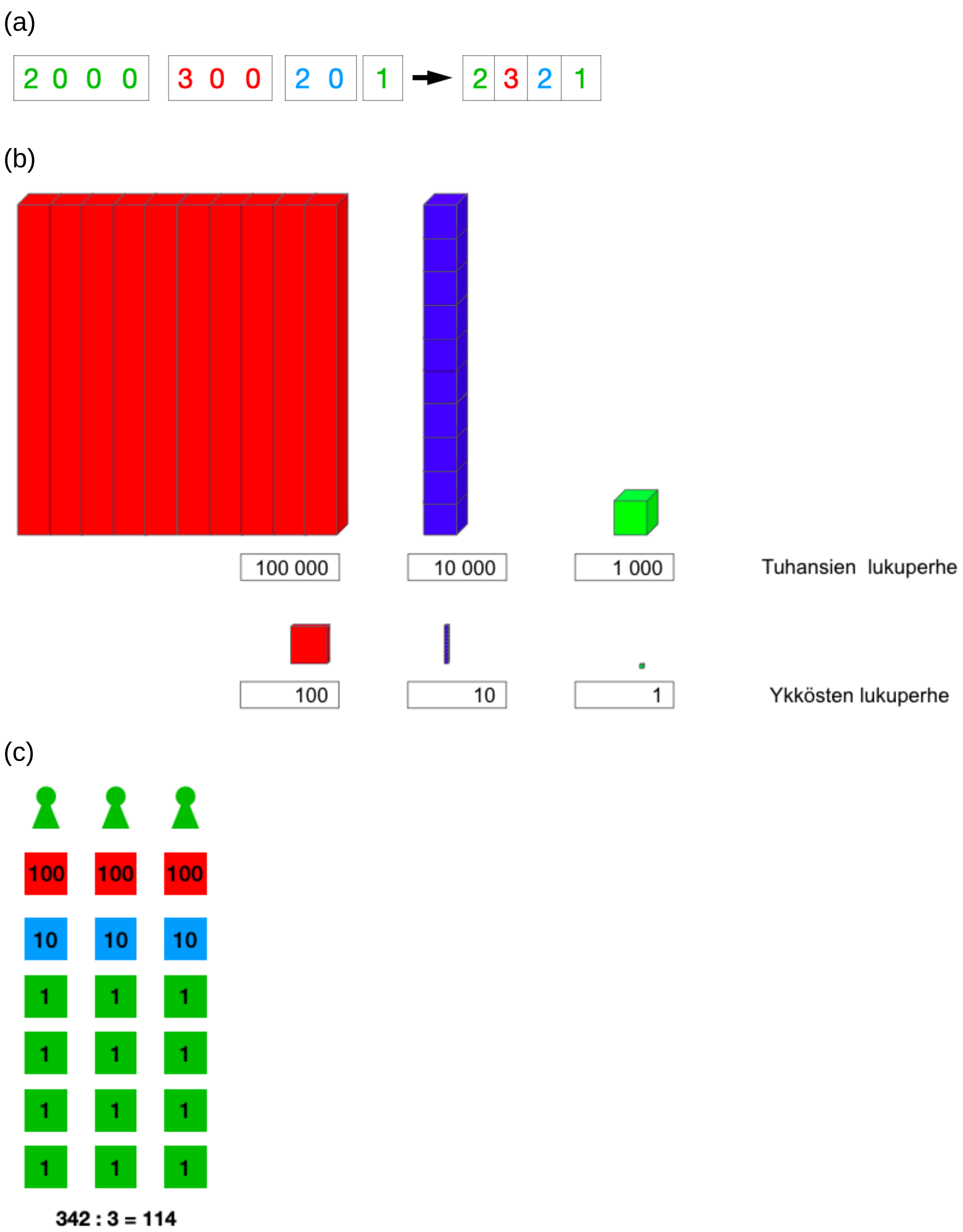
Kuva 3. Montessorimatematiikan konkreettisia välineitä. (a) kertolaskulauta (*multiplication board*), (b) jakolaskulauta (*division board*) sekä (c) kultaiset helmet (*golden beads*) ja niiden kanssa käytettävät lukukortit (*number cards*). Näissä materiaaleissa toteutuu yksi-yhteen -vastaavuus, eli esimerkiksi luku 12 vastaa kahtatoista esinettä. Kertolaskulaudassa on kuvattu lasku 4 x 3. Jakolaskulaudassa on kuvattu lasku 12 : 4. Kultaisilla helmillä on kuvattu luku 2321.

2.3. Lukuyksiköiden värikoodaus montessorimatematiikassa

Suurin osa montessorimatematiikan välineistä sijoittuu semikonkreettisille abstraktion portaille, eli ne ovat konkreettisia välineitä abstraktimpia. Kaikilta osin yksi-yhteen-vastaavuutta ei enää ole.

Näissä välineissä numeron paikka-arvo on yleensä abstrahoitu lukuyksiköittäin värikoodien avulla, mikä onkin keskeistä näissä välineissä ja mahdollistaa ylipäänsä niiden olemassaolon ja käytettävyyden. Montessorimateriaaleissa noudatetaan seuraavanlaisia värikoodeja: ykköset ovat vihreitä, kymmenet ovat sinisiä ja sadat ovat punaisia. Samat värikoodit toistuvat muissakin lukuperheissä, eli myös esimerkiksi tuhansien perheessä ykköset (eli tuhannet) ovat vihreitä, kymmenet (eli kymmenettuhannet) ovat sinisiä ja sadat (eli sadattuhannet) ovat punaisia. Myös desimaaliluvuissa samat värit pitävät paikkaansa, eli kymmenesosat ovat sinisiä, sadasosat punaisia, tuhannesosat vihreitä, jne. Nämä samat värikoodit ovat käytössä kaikissa materiaaleissa, joilla operoidaan useampien lukuyksiköiden parissa. Värit esiintyvät mm. kultaisten helmien kanssa käytettävissä lukukorteissa (*number cards*), hierarkkisessa materiaalissa (*wooden hierarchical material*) ja postimerkkipelissä (*stamp game*), joita havainnollistan kuvassa 4 (Kuva 4). Postimerkkipeliä käytetään eri laskutoimitusten laskemisessa. (Baker, 2018.) Montessorivälineistössä on käytössä näiden lukuyksiköiden värien lisäksi myös muita värijärjestelmiä, joita en erikseen avaa tässä työssä.

Montessorivälineet on suunniteltu siten, että ne etenevät askeleittain kohti abstraktiota. Ensimmäisillä semikonkreettisilla portailla luku on saatettu abstrahoida lukuyksikön värin mukaan. Viimeisillä portailla abstraktion tasoja on jo useampia, mutta edelleen toimitaan semikonkreettisen materiaalin kanssa, eikä olla siirrytty täysin abstraktiin esitykseen. Välineissä onkin pyritty siihen, että lapsi etenee oppimisessaan pikku hiljaa yhä abstraktimpaan matematiikan ymmärtämiseen. Välineet tukevat häntä siinä, antavat kokemuksia, poistavat esteitä ja mahdollistavat oppimisen yrityksen ja erehdyksen kautta. Lopulta ollaan siinä vaiheessa, että lapsi kykenee operoimaan matematiikassa täysin tai lähes täysin abstraktilla tasolla. Tällöinkin hänellä on aina mahdollisuus saada tukea näistä välineistä, esimerkiksi jos hän haluaa varmistua oppimisestaan tai silloin, kun hän opiskelee uutta asiaa. Montessorivälineiden avulla on mahdollista opetella matematiikkaa hyvin pitkälle, sillä välineitä on olemassa esimerkiksi polynomien ratkaisemiseen sekä neliö- ja kuutiojuuren määrittämiseen. (Baker, 2018.) Välineiden kauneus on mielestäni siinä, että ne auttavat käsitteiden syvällisemmässä ymmärtämisessä, koska niiden avulla matematiikan oppimisesta jää oppijalle sekä kuvallinen että kehollinen muistijälki.



Kuva 4. Montessorimatematiikassa lukuyksiköt on värikoodattu. Ykköset ovat aina vihreitä, kymmenet sinisiä ja sadat punaisia. Samat värikoodit toistuvat muissakin lukuperheissä. Samoja värejä käytetään läpi koko välineistön, kun operoidaan useampien lukuyksiköiden parissa. Värit esiintyvät mm. (a) lukukorteissa (*number cards*), (b) hierarkkisessa materiaalissa (*wooden hierarchical material*) ja (c) postimerkkipelissä (*stamp game*).

3. Kirjallisuuskatsauksen tavoitteet ja toteutus

Tämän kirjallisuuskatsauksen tavoitteena on rakentaa kokonaiskuvaa lukujen rakenteen oppimisesta. Tämän toteutan selvittämällä, mitä lukujen rakenteesta, kymmenjärjestelmästä ja paikka-arvosta on sanottu erityisopettajaopinnoissamme ja tutkimuskirjallisuudessa sekä kuvata, mitä pulmakohtia lapsella voi olla näiden käsitteiden oppimisessa. Tämän katsauksen pohjalta esitän näkemykseni siitä, kuinka montessorimatematiikan avulla voidaan tukea lukujen rakenteen oppimista sekä pohdin sitä, kuinka lukujen rakenteen oppimista voidaan tukea jokaisessa koululuokassa.

3.1 Menetelmä

Tutkimus tehtiin käyttäen menetelmänä narratiivista kirjallisuuskatsausta, joka on metodisesti kevyin kuvailevan kirjallisuuskatsauksen muoto. Kuvailevassa kirjallisuuskatsauksessa aineisto valitaan suuresta joukosta, eivätkä metodiset säännöt rajaa valittavaa aineistoa. Tutkittava ilmiö pystytään tällä menetelmällä kuvaamaan laaja-alaisesti. (Salminen, 2011.) Päädyin tähän menetelmään, koska se on tehokas väline tällaiseen melko lyhyeen katsaukseen aiheesta. Lisäksi olen pyrkinyt kuvaamaan tutkimaani ilmiötä mahdollisimman helppolukuisesti, jotta tuottamani tieto on mahdollisimman monen saatavilla.

3.2 Tutkimuskysymykset

Tässä tutkimuksessa minulla on kolme tutkimuskysymystä: (1) Mitä paikka-arvosta ja kymmenjärjestelmästä sanotaan meidän erityisopettajaopinnoissa ja tutkimuskirjallisuudessa? (2) Mitä pulmia lapsella voi olla kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon käsitteiden hallitsemisessa? (3) Kuinka montessorivälineillä voidaan tukea kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon käsitteiden oppimista?

3.3 Aineiston keruu

Aluksi tutkin, mitä meidän erityisopettajaopinnoissa on sanottu kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon oppimisesta. Tämän jälkeen perehdyin aiheeseen Mononen ym. (2017) teoksen sekä Bryant (1996) ja Aunio & Räsänen (2015) artikkeleiden avulla. Lopuksi täydensin tietoa Finnasta ja Google Scholarista hakusanoilla ”teaching place value”, ”teaching decimal system”, ”teaching decimal structure” ja ”montessori”. Kokeilin myös muita hakutermejä, mutta niillä ei tullut osumia.

Tutustuin useampiin artikkeleihin, jotka oli kirjoitettu tästä aiheesta. Artikkelit oli julkaistu vuosina 1990-2021. Näistä artikkeleista valitsin keskeisimmät mukaan tähän katsaukseen. Lisäksi täydensin tietoja löytämieni artikkeleiden lähteiden avulla.

4. Tulokset

Tässä osiossa esittelen tutkimukseni tulokset. Tutkimuksen edetessä löysin uuden termin ”lukujen rakenne”, jota voidaan käyttää kuvaamaan paikka-arvoa ja kymmenjärjestelmää, sillä kymmenjärjestelmä on maailmanlaajuisesti niin vakiintunut tapa ymmärtää lukujen rakennetta. Tämä termi on hyvin käyttökelpoinen, joten otin sen käyttöön laaja-alaisesti koko työssäni.

4.1 Lukujen rakenne

Lapset alkavat luetella lukusanoja yleensä jo noin 2-vuotiaana. Aluksi tämä luettelu on lorumaista ja siinä esiintyy monia virheitä. Tyypillisiä virheitä ovat esimerkiksi lukujonot kuten “...kaksikymmentä-yhdeksän, kaksikymmentä-kymmenen, kaksikymmentä-yksitoista…” Lukujen rakenteen omaksuminen vie aikansa, ja lapsen tulee oppia, että kymmenjärjestelmässä lukuja kootaan ja hajotetaan: Kymmeniin, myöhemmin satoihin ja tuhansiin, kymmenesosiin ja sadasosiin. (Bryant, 1996.)

Lukujen rakenteella tarkoitetaan sitä, että kaikki luvut ovat rakentuneet numeroista, jotka ovat järjestyneet loogiseksi järjestelmäksi ja luvussa olevat numerot saavat arvonsa niiden järjestyksen eli paikan perusteella. Lukujen rakenne siis koostuu kymmenjärjestelmästä ja paikka-arvosta.

4.2 Kymmenjärjestelmä

Numerojärjestelmämme saattaa asiaan perehtymättömälle vaikuttaa yksinkertaiselta jatkumolta, jota se ei kuitenkaan ole. Se on hierarkkisesti rakentuva lukujärjestelmä, jonka kantalukuna on kymmenen. Kymmenjärjestelmässä lukuja voidaan rakentaa eri lukuyksiköistä, kuten ykkösistä, kymmenistä ja sadoista. Tämä tarkoittaa myös sitä, että kymmenjärjestelmän rakenteen ymmärtäessään ei tarvitse muistaa lukujen järjestystä, vaan se voidaan päätellä. Esimerkiksi luvun 1119 jälkeen tulee 1120, jonka tietää, kun omaa tarvittavan ymmärryksen kymmenjärjestelmästä. (Bryant, 1996.)

Kymmenjärjestelmässä käytetään paikkamerkintää, jossa on oma paikkansa esimerkiksi ykkösille, kymmenille ja sadoille. Näitä jokaista voi olla paikalla 0-9. Kymmenjärjestelmän oppimisessa lapsen tulee ymmärtää, että kymmenen ykköstä muodostaa kympin, ja kymmenen kymmentä sadan, jne. Myöhemmin lapsi oppii desimaaliluvut. (Mononen ym., 2017.)

Kymmenjärjestelmän historia perustuu todennäköisesti siihen, että ihmisillä on kahdessa kädessä yhteensä kymmenen sormea. On olemassa myös muita numerojärjestelmiä, jotka pohjaavat muihin kantalukuihin ja lukuihin. 2-järjestelmässä eli binaarijärjestelmässä kantalukuna on 2, ja siinä on käytössä vain luvut 1 ja 0. Tätä järjestelmää käytetään tietokoneissa. (Britannica, 2022.) Septenaari- eli 7-järjestelmässä kantalukuna on seitsemän, ja se on tavallaan käytössä, kun laskemme viikonpäiviä. Kantalukuna voi toimia periaatteessa mikä tahansa luku. Toisaalta on myös olemassa numerojärjestelmiä, jotka eivät perustu mihinkään kantalukuun. Esimerkiksi viisilukujärjestelmä on ollut käytössä useissa varhaisissa kulttuureissa. Siinä esimerkiksi luku 12 voidaan esittää muodossa “viisi-viisi-kaksi”. Myös roomalaisia numeroita voidaan pitää eräänlaisena viisilukujärjestelmänä. (Barrow, 1999.)

Kymmenjärjestelmällä on tärkeä rooli yhteiskunnassa, sillä se on käytössä mm. rahajärjestelmässä ja useissa käytössä olevissa mittayksiköissä. Lapset oppivat sen käyttöä sekä koulussa että koulun ulkopuolella. Koulumatematiikassa se tulee vastaan heti, kun aletaan käsitellä yhdeksää suurempia lukuja. Se on kuitenkin kulttuurinen keksintö, eikä lapsen voi odottaa oppivan sitä automaattisesti. Se opitaan sukupolvelta toiselle, ja se katoaisi, jos sitä ei opetettaisi eteenpäin. (Bryant, 1996.)

4.3 Paikka-arvo

Paikka-arvolla tarkoitetaan kymmenjärjestelmässä sitä, että numerot (0-9) saavat tietyn arvon riippuen siitä, millä paikalla se on luvussa. Esimerkiksi numeron 6 arvo on erilainen luvuissa 6, 63 ja 623 riippuen siitä, mikä sen paikka on. (Mononen ym., 2017.)

Monissa tutkimuksissa on pyritty määrittelemään käsitteitä, jotka lapsen tulee ymmärtää hallitakseen paikka-arvon. Millä tahansa paikalla numero voi olla sama kuin jollakin toisella paikalla. Numerot kasvavat 0-9, minkä jälkeen tulee jälleen 0, kun samalla vasemmanpuoleinen numero kasvaa yhdellä. Tätä kutsutaan toistuvaksi SKY-kuvioksi (sadat, kymmenet, ykköset -kuvioksi). (Hartnett, 2018.) Lisäksi lapsen tulisi ymmärtää, että lukuja voi hajottaa ja koota eri tavoin, esimerkiksi 6 tuhatta = 60 sataa (hajottaminen), 60 sataa = 6 tuhatta (kokoaminen) ja 6 tuhatta = 5 tuhatta ja 10 sataa (yhdisteleminen) (Baturo, 1997). Lapsen tulee myös oppia, että kymmenjärjestelmän rakenne on kerrannainen, eli lukuyksiköiden välinen ero on aina kymmenkertainen. Tämä tarkoittaa sitä, että “kymmenen näitä on yksi noita”, esimerkiksi “kymmenen kymmentä on yksi sata”. Voidaankin todeta, että näennäisesti yksinkertainen paikka-arvo pitää sisällään suuria ajatuksia ja toisiinsa tiukasti liittyviä käsitteitä. (Hartnett, 2018.)

Paikka-arvon ymmärtämisellä on merkitystä paitsi kokonaislukujen, myös desimaalilukujen oppimisessa. Tutkimuksessaan Baturo (1997) tutki 6.-luokkalaisten ymmärtämystä kymmenjärjestelmästä ja paikka-arvosta erityisesti kymmenesosien ja sadasosien suhteen. Tutkimuksessa heikosti suoriutuvilla oppilailla ei ollut käsitystä kymmenjärjestelmän kerrannaisesta rakenteesta. Tämä näkyi mm. siinä, että he eivät tienneet desimaalilukuyksiköiden nimiä, eikä niiden paikkaa tai järjestystä. Toisaalta vain 10 % oppilaista osasi nämä niin hyvin, että he pystyivät soveltamaan oppimaansa vaikeuksitta myös esimerkiksi tuhannesosiin ja kymmenestuhanneosiin.

4.4 Pulmat lukujen rakenteen hallitsemisessa

4.4.1 Paikka-arvo ja matematiikan oppimisvaikeudet

Lukusanojen ja lukusymboleilla esitetyn luvun vastaavuus vaihtelee eri kielissä. Joissakin kielissä vastaavuus on hyvin säännöllinen, esimerkiksi kiinan kielessä luku 12 voidaan kääntää “kymmenen-kaksi” ja luku 325 “kolme-sata-kaksi-kymmenen-viisi”. (Mononen ym., 2017.) Joissakin kielissä yhteys ei ole yhtä selkeä, esimerkiksi englannin kielessä luvut 11-20 ovat epäsäännöllisiä, eikä luku kolmekymmentäkään ole täysin säännöllinen (vrt. “three-ty” ja “thirty”) (Bryant, 1996). Joissakin kielissä sanotun luvun lukusanat ovat eri järjestyksessä kuin numerosymbolit, esimerkiksi suomen kielessä luku 14 sanotaan “neljätoista” ja saksassa luku 89 kääntyy muotoon “yhdeksän ja kahdeksankymmentä.” (Mononen ym., 2017.)

Kun lukusana ja numerosymboli eivät vastaa suoraan toisiaan, se voi vaikeuttaa lukujen kirjoittamista ja luvun rakenteen ymmärtämistä. Osa suomenkielisistä lapsista saattaa esimerkiksi kirjoittaa luvun 14 aloittaen numerosta 4 päätyen lukuun 41. (Mononen ym., 2017). Myös englanninkieliset lapset kamppailevat erityisesti “teen-lukujen” (luvut 13-19) epäsäännöllisyyden kanssa. Toisaalta useissa tieteellisissä tutkimuksissa on osoitettu, että kiinankieliset lapset oppivat käyttämään kymmenjärjestelmää hyödykseen esimerkiksi englanninkielisiä lapsia varhaisemmin. Tämä johtuu todennäköisesti edellä esitellyistä kielellisistä syistä ja kiinan kielen lukusanojen säännöllisyydestä. (Bryant, 1996.)

Erityisesti moninumeroisten lukujen rakenteen ymmärtäminen on vaikeaa lapsille, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Lukujen rakenteen ymmärtämisellä tarkoitetaan sitä, että lapsi ymmärtää, mistä lukuyksiköistä luku koostuu, esimerkiksi luvussa 435 on satoja 4, kymmeniä 3 ja ykkösiä 5. Lukujen rakenteen ymmärtäminen liittyy suoraan kymmenjärjestelmän ymmärtämiseen - eli siihen, että vierekkäisten lukuyksiköiden välinen suhde on kymmenkertainen - ja paikka-arvon hallitsemiseen - eli siihen, että numeromerkin paikka luvussa ilmoittaa sen arvon. Erityisen vaikeita ovat usein luvut, joissa on nolla, esimerkiksi 802. Tällöin lapsen tulee ymmärtää numeroiden paikka-arvo ja sen perusteella se, että tässä luvussa ei ole yhtään kymmeniä, mikä merkitään käyttämällä numeroa nolla. (Mononen ym., 2017.)

Kehittyvät lukujonotaidot auttavat ymmärtämään kymmenjärjestelmää ja paikka-arvoa. Kymmenjärjestelmän hyvä ymmärtäminen puolestaan tukee lapsia etenemään yksinumeroisilla luvuilla laskemisesta sujuvaan moninumeroisilla luvuilla ja myöhemmin desimaaliluvuilla laskemiseen, sillä tällöin vastauksen suuruusluokkaa ja oikeellisuutta on helpompi arvioida. Paikka-arvon ja kymmenjärjestelmän hallitseminen ovatkin aina oppimisen osana, kun lapsi harjoittelee laskemaan suuria lukumääriä. Paikka-arvon ja kymmenjärjestelmän oppiminen ja vahvistuminen jatkuvat koko peruskoulun ajan. (Mononen ym., 2017.)

4.4.2 Tyypillisiä paikka-arvovirheitä

Paikka-arvovirheet ovat tyypillisiä matematiikan virheitä. Numeron arvon virheistä puhutaan silloin, kun lapsella on kyvyttömyys erottaa moninumeroisia lukuja, koska hän ei ymmärrä lukuyksiköiden käsitteitä kuten ykkönen, kymmenen ja sata. Numeron laajentumisella tarkoitetaan sitä, kun lapsi kirjoittaa lukuyksiköiden mukana nollat, esimerkiksi luku 342 muuttuu muotoon 300402. (Hakkarainen, 2021) Tällöin lapsi ei ole vielä oppinut lukujen päällekirjoittamisen sääntöä eli sitä, että esimerkiksi lukuun 623 ei tule merkitä nollia, koska niiden paikalla on paikka-arvon mukaisesti jo numero (Mononen ym., 2017).

Peilireversaalilla tarkoitetaan sitä, että lukujen sisällä numeroiden järjestys kääntyy, esimerkiksi 23 kääntyy muotoon 32 (Hakkarainen, 2021). Tämän virhetyypin kohdalla tulee huomioida, että lapsi saattaa kirjoittaa luvun siten kuin sen kuulee, eli esimerkiksi luvussa “kolmetoista” sanotaan ensin “kolme”, joten lapsi saattaa kirjoittaa luvun tämän vuoksi muotoon 31. (Mononen ym., 2017). Suomen kielessä tämä vaikutus tulee ilmi ainoastaan luvuissa 11-19 sekä aiemmin mainituissa numeron laajentumisen tapauksissa. Osittaisesta reversaalista puhutaan, kun vain yksi numeroista vaihtaa paikkaa, esimerkiksi 317 muuttuu muotoon 371. Myös siirtymät ovat mahdollisia, jolloin numero vaihtaa paikkaa luvun sisällä satunnaisesti. Numeron paikka-arvo saattaa muuttua myös, jos lapsi jättää luvusta jonkin numeron pois. Tällöin hän saattaa kirjoittaa esimerkiksi numeron “kaksisataa kolme” muotoon 23, jättäen nollan pois luvusta. Myös jokin muu numero voi puuttua luvusta. (Hakkarainen, 2021.)

Lukujen rakenteen ymmärtäminen korostuu laskualgoritmien, kuten allekkainlaskun ratkaisemisessa. Allekkainlaskussa lukuyksiköt on sijoitettava allekkain oikeille paikoilleen, ja laskua ratkaistaessa lukuyksiköiden arvo säilyy. Myös vastauksen oikeellisuuden arvioinnissa luvun rakenteella ja suuruusluokalla on tärkeä merkitys. (Mononen ym., 2017.)

Myös muunlaiset virheet allekkainlaskuissa ovat mahdollisia. Lapsi saattaa esimerkiksi jättää huomiotta muistiin viedyn numeron. Hän voi myös jättää muistiin viennin tekemättä, jolloin esimerkiksi yhteenlaskussa kaikki tuloksena saadut luvut on kirjoitettu suoraan tulokseen, esimerkiksi 237 + 175 = 31012. Lapsi saattaa myös viedä muistiin väärän luvun, joka yleensä on ykkösiä ilmaiseva luku, ja kirjoittaa kymmeniä ilmaisevan luvun vastaukseen. Myös lukujen lainaamisessa saattaa olla virheitä, lapsi saattaa esimerkiksi lainata paikka-arvoltaan pienemmältä suuremmalle. (Hakkarainen, 2021.)

Lapselle saattaa aiheuttaa ongelmia myös omien, virheellisten laskusääntöjen muodostuminen. Hän on saattanut esimerkiksi oppia, että 10 x 3 = 30 ja tuloksen saa lisäämällä nollan kerrottavan perään. Jos hän yrittää laajentaa tämän säännön desimaalilaskuihin, se ei enää toimikaan, sillä 10 x 5,8 $\neq$ 5,80. Desimaalilukuja kerrottaessa lapsen tulisi osata hyödyntää tietoa kymmenjärjestelmästä ja siitä, että kymmenellä kerrottaessa luku kymmenkertaistuu, eli siirtyy lukuyksiköissä yhtä suuremmalle paikalle. Koska 10 x 5 = 50 ja 10 x 0,8 = 8, niin 10 x 5,8 = 58. (Mononen ym., 2017.)

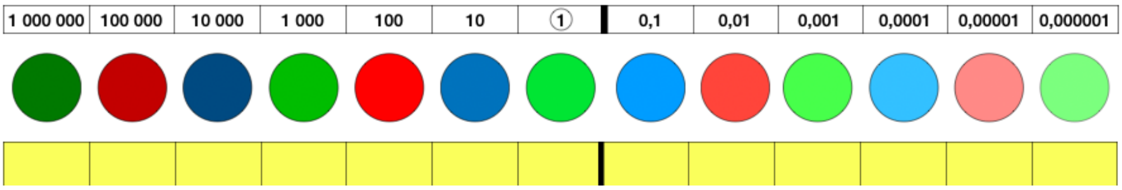
Vahva ymmärrys luvun rakenteesta eli paikka-arvosta ja kymmenjärjestelmästä todennäköisesti ehkäisee allekkainlaskuvirheiden esiintymistä. Tämä ymmärrys auttaa myös desimaalilukujen oppimista, sillä desimaaliluvut toimivat samojen kymmenjärjestelmän periaatteiden mukaisesti kuin kokonaisluvutkin.

4.5 Lukujen rakenteen oppimisen tukeminen

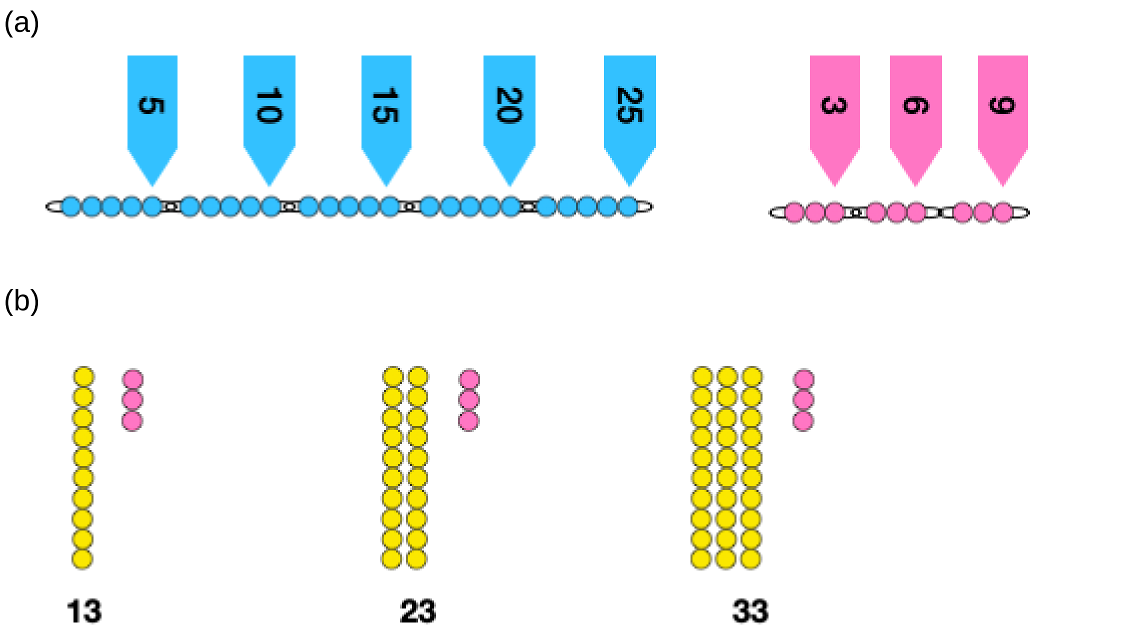
Hallitakseen paikka-arvon lapsen tulee kyetä tiettyihin operaatioihin, joista Rogers (2012) on kirjallisuuskatsauksessaan tehnyt listan: (a) hyppylaskut lukuyksiköittäin (esim. 45, 55, 65 ja 132, 232, 332) ja lukuyksiköiden välinen siltaus kuten sataylitys hyppimällä (esim. 995, 1005, 1015), (b) luvun arvon osoittaminen erilaisten mallien ja välineiden avulla (jotka voivat olla mittasuhteessa tai ilman), (c) lukujen kirjoittaminen ja nimeäminen (esim. luku 75 on nimeltään seitsemänkymmentäviisi), luvun arvon ymmärtäminen sen paikan perusteella (esim. luvun 3 arvo luvussa 345 on kolmesataa) ja lukujen pyöristäminen eri tarkkuuksilla (esim. pyöristä luku 3456 lähimpään tuhanteen), (d) lukujen uudelleennimeäminen (esim. luvussa 1260 on 126 kymmentä), (e) Lukujen suuruusluokan vertailu ja lukujen järjestäminen kasvavaan tai laskevaan järjestykseen, (f) paikka-arvon hyödyntäminen laskemisessa (esim. 10 kertaa 45 on 45 kymmentä) ja (g) lukujen suuruusluokan arvioiminen (esim. kuinka monta appelsiinia tarvitaan luokan täyttämiseen? 10, 100 vai 100 000?).

4.6 Montessorivälineet lukujen rakenteen oppimisen tukena

Montessorimatematiikassa paikka-arvon käsitettä tukee värikoodeissa toistuva sadat, kymmenet, ykköset -kuvio (SKY-kuvio), joka on välineissä koodattu väreillä punainen (sadat), sininen (kymmenet) ja vihreä (ykköset) (Baker, 2018). Tästä esimerkkinä desimaalilauta (*decimal board*) (Kuva 5). Hyppylaskuja harjoitellaan mm. hyppylaskuketjujen (*bead chains*) avulla ja lukuyksiköittäin hyppylaskuja voidaan tehdä mm. helmisauvoilla (*bead bars*) (Kuva 6). Luvun arvoa osoitetaan erilaisten välineiden avulla, joista osa on mittasuhteessa (esim. kultaiset helmet) ja osa ei (esim. postimerkkipeli) (Kuvat 3 ja 4).

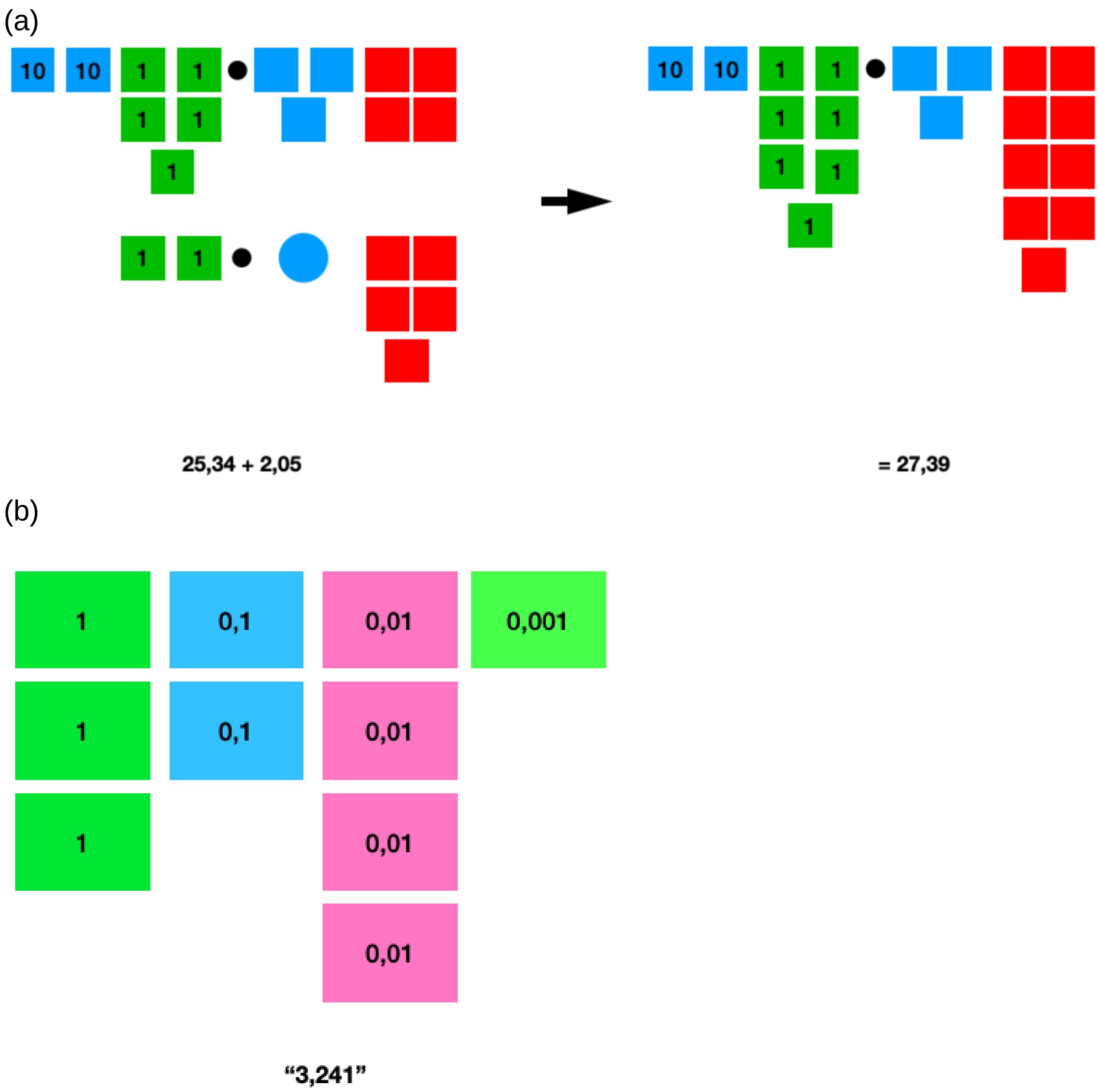


Kuva 5. Desimaalilaudassa (*decimal board*) toistuu SKY-kuvio värikoodattuna. Punaiset, siniset ja vihreät seuraavat toisiaan (järjestys muuttuu siirryttäessä desimaalilukuihin). Tässä välineessä poikkeuksellisesti värien tummuus kuvaa lukuyksikön arvoa, sillä desimaalien suhteellista pienuutta on haluttu korostaa. Desimaaleissa värit ovat tästä syystä vaaleimpia.



Kuva 6. Montessorimatematiikassa hyppylaskuja voi tehdä eri välineillä. (a) Hyppylaskuketjut (*bead chains*), joissa on ketjun muodossa helmiä jaoteltuna eri määriin. Kuvassa lukujen 5 ja 3 lyhyet ketjut. (b) Helmisauvat (*bead bars*). Helmisauvoilla voidaan rakentaa erilaisia lukuja ja havainnoida myös visuaalisesti niiden rakennetta. Kuvassa esimerkkinä luvut 13, 23 ja 33.

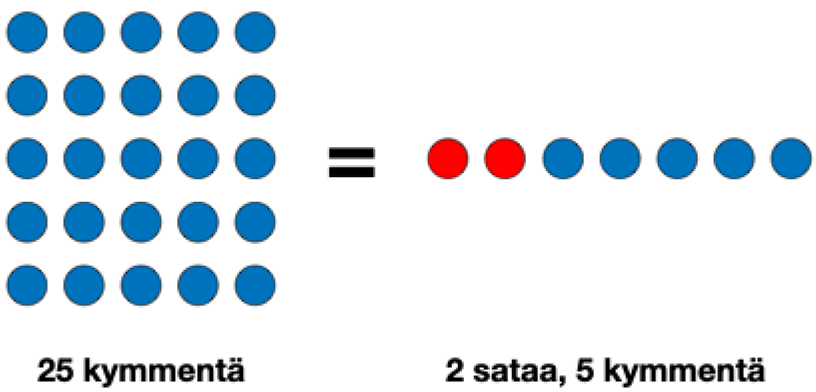
Luvun paikka-arvoa harjoitellaan kaikilla materiaaleilla, joissa on käytössä värikoodattu matematiikka: sadat ovat punaisia, kymmenet sinisiä ja ykköset vihreitä, kymmenesosat sinisiä ja sadasosat punaisia. Tästä esimerkkinä postimerkkipeli (kuva 7).



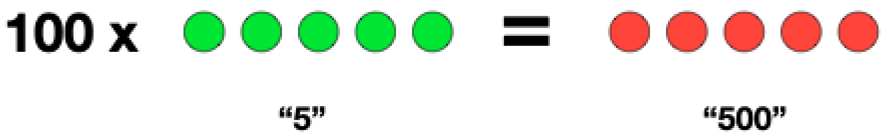
Kuva 7. Postimerkkipeliä (*stamp game*) voi käyttää desimaalilaskujen havainnollistamiseen. (a) Postimerkkipelillä (Kuva 4c) voidaan laskea myös desimaalilaskuja. Tällöin numerolaatat käännetään desimaaliosissa väärinpäin, jolloin emme näe numeroa, ja vain laatan väri kuvaa arvoa. Sininen ympyräkiekko toimii kuvan laskun kymmenesosissa paikanvartijana (*engl. placeholder*), nollana. (b) Desimaalipostimerkkipeliä (*decimal stamp game*) käytetään, kun halutaan korostaa desimaalilukujen arvoa. Kuvassa tällä välineellä on muodostettu luku 3,241.

Myös lukujen uudelleennimeämistä harjoitellaan näillä värikoodatuilla materiaaleilla, sillä esimerkiksi 25 kymmentä (25 sinistä nappulaa) on yhtä suuri kuin 2 sataa (2 punaista nappulaa) ja 5 kymmentä (5 sinistä nappulaa) (Kuva 8). Samaa periaatetta voidaan käyttää myös hyödyntämällä paikka-arvoa laskemisessa, jolloin esimerkiksi kertomalla

100 x 5, viidestä vihreästä nappulasta (ykkösestä) tulee viisi punaista nappulaa (sataa) (Kuva 9). Lukujen suuruusluokkaa harjoitellaan mm. hierarkkisen materiaalin avulla (Kuva 4b). Päällekirjoittamisen sääntöä voidaan harjoitella rakentamalla lukuja kymmenjärjestelmävälineillä, kuten montessorimatematiikan kultaisilla helmillä ja lukukorteilla (Kuva 3) (Baker, 2018; Mononen ym., 2017).



Kuva 8. Värikoodatut nappulat (*pegs for peg board*). Niiden avulla voidaan harjoitella lukujen uudelleen nimeämistä. Esimerkiksi 25 kymmentä (sinistä nappulaa) on yhtä suuri kuin 2 sataa (punaista nappulaa) ja 5 kymmentä (sinistä nappulaa).



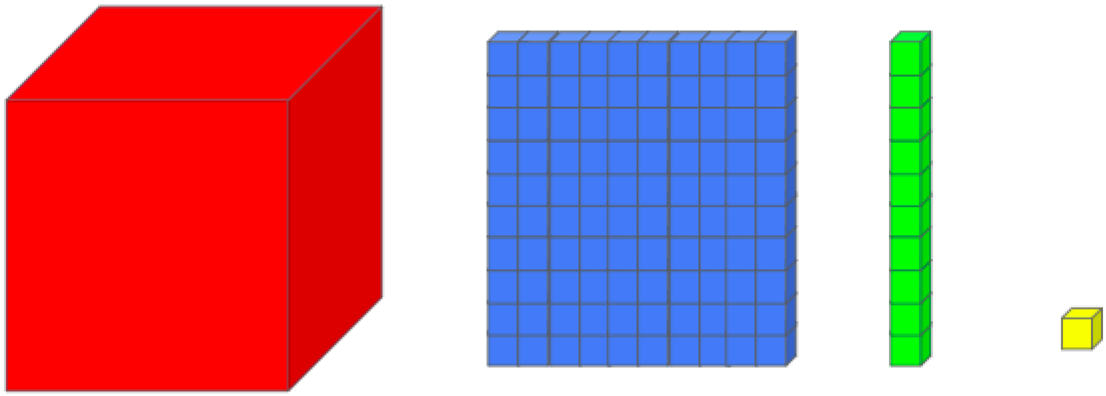
Kuva 9. Paikka-arvon ja värikoodauksen hyödyntäminen laskemisessa. Jos kerron luvun 5 (ykköstä) sadalla, tulokseksi saan satakertaisen määrän samaa, eli 5 (sataa).

5. Pohdintaa

Kymmenjärjestelmä ja paikka-arvo ovat kokonaisuuksia, jotka saattavat näennäisesti olla yksinkertaisia, mutta joiden takana on kuitenkin useita erilaisia käsitteitä, jotka lapsen tulisi hallita ymmärtääkseen matematiikkaa. Kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon sujuva hallinta auttavat erityisesti moninumeroisten lukujen ja desimaalilukujen sekä näillä tehtävien (allekkain)laskujen operoinnissa. Tietenkin lapsi voi myös pärjätä vaillinaisella ymmärryksellä ja opetella koko joukon erilaisia muistisääntöjä, mutta se on muistille kuormittavaa. Sen vuoksi kymmenjärjestelmän parempaan ymmärtämiseen olisi hyvä panostaa varsinkin lapsilla, joiden työmuisti on heikko tai kuormittunut.

Keskeistä kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon ymmärtämisessä on se, että numeroita on olemassa kymmenen: 0-9. Kymmenjärjestelmässä numero saa arvon sen mukaan, mikä paikalla se on luvussa. Numeron 9 jälkeen tulee aina 0, ja seuraava lukuyksikkö kasvaa yhdellä. Tästä muodostuu toistuva sadat, kymmenet, ykköset -kuvio.

Mielestäni montessorimatematiikan värikoodauksessa tämä SKY-kuvio on otettu hienosti huomioon. Sen sijaan tavalliset, suomalaisissa kouluissa yleiset kymmenjärjestelmävälineet jättävät värityksessään tämän kuvion täysin huomiotta, sillä siinä tuhannet ovat punaisia, sadat sinisiä, kymmenet vihreitä ja ykköset keltaisia (Kuva 10).



Kuva 10. Tavalliset kymmenjärjestelmävälineet. Niissä on jätetty värityksessä huomiotta kymmenjärjestelmän toistuva SKY-kuvio (sadat, kymmenet, tuhannet). Voit verrata montessorimatematiikan vastaavaan materiaaliin (Kuva 4b), jossa SKY-kuvio on huomioitu.

Montessorimatematiikassa värikoodauksesta on apua myös monen muun paikka-arvon ja kymmenjärjestelmän käsitteen oppimisessa. Värikoodaus auttaa erityisesti lukuyksiköstä seuraavaan siirryttäessä (esim. kymmenestä ykkösestä tulee yksi kymmenen) sekä uudelleennimeämisessä (esim. luvun viisi kymmenkertaistamalla muutamme luvun paikka-arvoa; värikoodauksessa luvun väri vaihtuu, numero/lukumäärä pysyy samana).

Lapsen tulisi myös ymmärtää, että kymmenjärjestelmän rakenne on kerrannainen, eli lukuyksiköiden välinen ero on aina kymmenkertainen. Tämä koskee sekä kokonaislukuja että desimaalilukuja. Montessorimatematiikan välineissä tätä pyritään havainnollistamaan kautta linjan, ja erityisesti desimaalilaudan avulla pyritään kokoamaan tämä tieto (kuva 5).

Näiden lisäksi paikka-arvon sujuva hallitseminen vaatisi sen, että lapsi oppii hajottamaan ja kokoamaan lukuja eri tavoin. Hänen tulisi ymmärtää, että esimerkiksi 5 sataa on yhtä paljon kuin 50 kymmentä tai 40 kymmentä ja 100 ykköstä. Uskoisin, että tätä tietoa kannattaa opettaa lapsille eksplisiittisen matematiikkapuheen avulla. Esimerkiksi numeroa sata käsiteltäessä voi olla havainnollista, että opettaja kertoo, että “sata on sama kuin kymmenen kymmentä”, ja lukuja 100-200 opiskeltaessa “150 on yhtä paljon kuin 15 kymmentä”. Numeroita lähimpään kymmeneen pyöristäessä “luku 195 pyöristyy 200:an, sillä 200 on yhtä paljon kuin 20 kymmentä. Näin ollen kymmeniin pyöristäessä pyöristetään välillä myös satoihin, jos se on luvun lähin kymmenluku.” Myös allekkainlaskussa lukuyksiköt olisi hyvä mainita, eli esimerkiksi allekkainlaskiessa 194 + 25 “ensin lasketaan ykköset, sitten kymmenet, joista tuleekin 11 kymmentä eli 100 ja kymmenen, ja lopuksi lasketaan sadat yhteen”. Toisaalta alkuopetuksessa luvun rakennetta voi korostaa kertomalla esimerkiksi, että “tässä on kymmenen ja yksi eli yksitoista”. Tällaisen tiedon ääneen sanomisella voi pyrkiä helpottamaan lapsen ymmärrystä luvuista 10-20, joiden nimet suomen kielessä ovat epäsäännölliset muihin kaksinumeroisiin lukuihin verrattuna. Tällaisen ekplisiittisen matematiikkapuheen vaikutusta oppimiseen ja kymmenjärjestelmän hahmottamiseen kannattaisi ehdottomasti tutkia.

Matematiikan oppimisvaikeudet -kurssilla opin, että paikka-arvon opettamiseen paras - ja mahdollisesti ainoa - tapa on päällekirjoittamisen säännön harjoittelu kymmenjärjestelmävälineiden ja niihin värikoodattujen lukukorttien avulla. Tämän opintotehtävän luettuasi olet toivottavasti kanssani samaa mieltä siitä, että paikka-arvon oppimiseen on olemassa myös muita välineitä ja menetelmiä. Olenkin sitä mieltä, että suomalaisissa kouluissa tarvittaisiin parempia ja monipuolisempia matematiikan havainnollistamisvälineitä. Niitä on olemassa ja ne ovat kaikkien saatavilla. Tällaisia välineitä voi lainata esimerkiksi montessorimatematiikasta. Uskon, että ne hyödyttäisivät erityisesti lapsia, joilla on matemaattisia haasteita. Jos haluat kokeilla montessorivälineitä, mutta et tiedä mistä aloittaisit, postimerkkipeli on hyvä vaihtoehto. Internetissä on eri kielillä saatavilla valtava varanto montessorimateriaaleja sekä tulostettavassa että sähköisessä muodossa. Lisäksi saatavilla on opastusta välineiden käyttöön sekä jopa ohjeita niiden valmistamiseen itse. Suomessa montessorivälineitä myy mm. Elli Early Learning.

Lähteet

American Montessori Society (28.2.2022) *What is Montessori Education?* https://amshq.org/About-Montessori/What-Is-Montessori

Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years - a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684-704.

Baker, K. M. (2018). *Mathematics Album.* AMI Montessori 6-12 Diploma course. MIRTC: Girona

Barrow, J. D. (1999). *Lukujen taivas: Laskeminen, ajattelu ja olemassaolo.* Helsinki: Art House

Baturo, A. (1997). *The implication of multiplicative structure for students' understanding of decimal number numeration.* Teoksessa Biddulph, F. & Carr, K., (toim.) Proceedings People in Mathematics Education : 20th Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 1, 88-95, Rotorua, New Zealand.

Britannica (1.3.2022). *Binary number system.* https://www.britannica.com/science/binary-number-system

Bryant, P. (1996). *Children and arithmetic.* Teoksessa Smith, L. Critical readings on Piaget (s. 312-346) London and New York: Routledge

Hakkarainen, A. (2021). *Matematiikan tyypillisiä virhetyyppejä ja pulmakohtia.* Luento.

Hartnett, J. (2018). Teaching place-value: Concept development, big ideas and activities. *Australian Primary Mathematics Classroom 23(3), 35-40.*

Marshall, C. (2017). *Montessori education: a review of the evidence base.* npj Science of Learning 2 (11)

Montessori Australia (28.2.2022). *Concrete to abstract.* https://montessori.org.au/node/4019

Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet.* PS-Kustannus: Juva

Rogers, A. (2012). *Steps in developing a quality whole number place value assessment for years 3–6: Unmasking the "experts".* Teoksessa: Dindyal, J., Cheng, L. P. & Ng S. F. (Toim.), Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia). Singapore: MERGA

Salminen, A. (2011). *Mikä kirjallisuuskatsaus? Johdatus kirjallisuuskatsauksen tyyppeihin ja hallintotieteellisiin sovelluksiin.* Vaasan yliopiston julkaisuja, opetusjulkaisuja 62, Julkisjohtaminen 4

Scott, C. M. & Myers, B. M. (2021). *Montessori Education: Teacher Perceptions of Challenges in Transitioning to Virtual Instruction.* Journal of Montessori Research 7(2)